

■ Η ΑΓΙΑ ΤΕΤΡΑΔΑ !!! ■

1) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

και στη συνέχεια

i) μέσω Cayley-Hamilton ναο $E^n = E^{n-2} + E^2 - I_3$, $n \geq 3$

ii) Να υπολογιστεί το E^{100}

iii) Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του E

iv) Να εξεταστεί αν υπάρχει E^{-1} και αν ναι, να
εμφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των E^2 , E και I_3

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} i) \chi_E(x) &= \det(E - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{pmatrix} = \\ &= (1-x) \cdot (x^2 - 1) = (1-x)^2 (1+x) = (x-1)^2 (x+1) \end{aligned}$$

ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1 \rightsquigarrow$ πολ/τας 2

$\lambda_2 = -1 \rightsquigarrow$ πολ/τας 1

πιθανά ελάχιστα

- $(x+1)(x-1) = m_E(x) \stackrel{c.H}{\Rightarrow} (E+I)(E-I) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$
- $\boxed{(x-1)^2(x+1) = m_E(x)}$

Άρα, αναγκαστικά $m_E(x) = (x-1)^2(x+1)$

Ως εκ τούτου ο πίνακας E δεν διαγωνοποιείται.

Διότι το ελάχιστο πολυώνυμο δεν γραφεται ως
γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων

β' φάση

Θα μπορούσαμε να βρούμε ιδιοχώρους και νδο ο πίνακας E
δεν διαγωνοποιείται μέσω γεωμετρικής πολ/τας, άρα
δεν θα γραφεται ως γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων

i) ΘΑΔ $E^4 = E^{4-2} + E^2 - I_3$, $n \geq 3$
 Προφανώς θα το αποδείξαμε με μαθηματική επαγωγή
 $n=3$, $E^3 = E + E^2 - I_3$ Ισχύει!

Διότι έχουμε $M_E(x) = (x-1)^2 \cdot (x+1) \Rightarrow M_E(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$

$$\Rightarrow M_E(E) = 0 \Rightarrow -E^3 + E^2 + E - I_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E^3 = E^2 + E - I_3 \quad \textcircled{1}$$

Εστω ότι ισχύει για n και ΘΑΔ ισχύει για $n+1$

$$E^{n+1} = E^n \cdot E = (E^{n-2} + E^2 - I_3)E = E^{n-1} + E^3 - E = \textcircled{1}$$

$$\stackrel{\textcircled{1}}{=} E^{n-1} + E^2 + E - I_3 - E = E^{n-1} + E^2 - I_3$$

$$\text{ii) } E^{100} = E^{98} + E^2 - I_3$$

$$E^{98} = E^{96} + E^2 - I_3$$

$$E^{96} = E^{94} + E^2 - I_3$$

$$\vdots$$

$$\textcircled{1} E^4 = E^2 + E^2 - I_3$$

100 = 2 \cdot 50
98 = 2 \cdot 49
96 = 2 \cdot 48
\vdots
4 = 2 \cdot 2

$$E^{100} = 50E^2 - 49I_3 = 50 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iii) Βρίσκεται στο πρώτο.

iv) Αφού $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0 \Rightarrow \exists E^{-1}$

$$E^3 = E^2 + E - I_3 \stackrel{E^{-1}}{\Rightarrow} E^2 = E + I_3 - E^{-1} \Rightarrow E^{-1} = E - E^2 + I_3$$

2) Έστω ο πίνακας $A \in M_{3 \times 3}(R)$, όπου:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & \beta \\ 0 & 3 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- i) Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in R$ ώστε ο πίνακας A να είναι διαγωνοποιήσιμος.
- ii) Αν A διαγωνοποιείται για τα $\alpha, \beta, \gamma \in R$ που βρέθηκαν να βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του A και χρησιμοποιήστε το για να βρείτε τον A^{-1} (αν υπάρχει).
- iii) ΝΑΙ. $A^{2002} = 5A^{2001} - 6A^{2000}$
- iv) Να βρείτε έναν πίνακα B , ώστε $B^3 = A$

ΛΥΣΗ

i) Ο πίνακας είναι ανω τριγωνικός άρα

$$\chi_A(x) = (x-3)^2 \cdot (x-2)$$

Ο πίνακας διαγωνοποιείται, άρα η αλγεβρική πολ/υντα θα πρέπει να ταυτίζεται με τη γεωμετρική.

Έχουμε ότι θα πρέπει: $\dim V(3) = 2$

Για την $\lambda = 2$ δεν μας ενδιαφέρει να το εξετάσουμε διότι έχει αλγεβρική πολ/υντα 1 άρα θα λείπει πάντοτε

$$V(3): (A - 3I)u = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ενας πίνακας B

$$\dim R_{3 \times 3} = \dim V(3) + \dim I_{3 \times 3} B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 = 2 + \text{rank } B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{rank } B = 1} \leftarrow \text{θα πρέπει το } \alpha = 0 \text{ και } \beta, \gamma \in R$$

ii) Αφού A διαγωνοποιήσιμος τότε $m_A(x) = (x-2)(x-3)$

δύο είναι και ταυτόχρονα και αναγκαία συνθήκες.

$$m_A(x) = x^2 - 5x + 6 \xrightarrow{C-H} m_A(A) = 0 \Rightarrow A^2 - 5A + 6I_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\exists A^{-1}} A^{-1}A^2 - 5AA^{-1} + 6A^{-1}0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6}(5I_3 - A) = \dots$$

$$\text{iii) } A \text{ του } A^2 = 5A - 6I_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{2000} A^2 = 5A A^{2000} - 6A^{2000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{2002} = 5A^{2001} - 6A^{2000}$$

$$\text{iv) } B^3 = A \text{ όπου } A \text{ διαγωνοποιήσιμος}$$

$$B^3 = P \Lambda P^{-1} \text{ με } P \text{ ο πίνακας ιδιοδιανυσμάτων}$$

και Λ ο διαγωνισμός με τις
αντίστοιχες ιδιοτιμές:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = P \begin{pmatrix} \sqrt[3]{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \end{pmatrix} P^{-1} = \dots$$

Βρίσκουμε τον P με
τις ιδιοδιανυσκτικές

Βρίσκουμε τον P^{-1} με

Gauss ή προσαρτημένο
και να πάρουμε τους
υπολογισμούς

- 3) Να οριστεί ισομετρία από τον $\mathbb{R}_2[x]$ εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g \, dx$ στον $\mathbb{R}^3$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο.

ΛΥΣΗ

$$T: (\mathbb{R}_2[x], \langle -, - \rangle') \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$$

- Έστω για τον $\mathbb{R}_2[x]$ η βάση $\{1, x, x^2\}$ και βρούμε την ορθοκανονική βάση αυτής της κανονικής βάσης μέσω G-S

$$\dim \mathbb{R}_2[x] = \dim \mathbb{R}^3$$

οπότε να είναι ισομετρική
ισομορφία 1 προς 1

$$v_1 = 1$$

$$v_2 = x - \frac{\langle x, v_1 \rangle'}{\langle v_1, v_1 \rangle'} \cdot 1 = (x - \frac{1}{2}) \xrightarrow{\text{κανονικ.}} v_2 = \sqrt{2} (x - \frac{1}{2})$$

$$v_3 = x^2 - \frac{\langle x^2, v_1 \rangle'}{\langle v_1, v_1 \rangle'} (x - \frac{1}{2}) - \frac{\langle x^2, v_2 \rangle'}{\langle v_2, v_2 \rangle'} \cdot 1 = (x^2 - x + \frac{1}{6}) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{κανονικ.}} v_3 = \sqrt{180} (x^2 - x + \frac{1}{6})$$

- για τον $\mathbb{R}^3$ η βάση

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$
 είναι ορθοκανονική

και δεν θα χρησιμοποιηθεί το θεώρημα G-S ως προς το συνδυασμένο εσωτερικό γινόμενο από τον $\mathbb{R}_2[x]$ στον $\mathbb{R}^3$ τότε

$$T(1) = (1, 0, 0), \quad T(\sqrt{2}(x - \frac{1}{2})) = (0, 1, 0), \quad T(\sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{6})) = (0, 0, 1)$$

Επειτα, ευρίσκεται το ζεύγος $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ της T στον $\mathbb{R}_2[x]$ ως γραμμ. συνδυασμό των στοιχείων της ορθοκανονικής βάσης του $\mathbb{R}_2[x]$ δηλ

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = k \cdot 1 + \lambda \sqrt{2} (x - \frac{1}{2}) + \mu \sqrt{180} (x^2 - x + \frac{1}{6}) \quad (1)$$

Υπολογίζουμε τα k, λ, μ

$$\mu = \frac{\delta}{\sqrt{180}}, \quad \lambda = \frac{\beta}{\sqrt{12}} + \frac{\gamma}{\sqrt{12}}, \quad k = \alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{3}$$

Επιλύοντας το σύστημα.

άρα στην σχέση ① είναι:

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = \left(\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{3} \right) \cdot 1 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{12}} + \frac{\gamma}{\sqrt{12}} \right) \sqrt{12} \left(x - \frac{1}{2} \right) + \frac{\delta}{\sqrt{180}} \sqrt{180} \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right)$$

ΕΛΕΓΝΕΣ, το $\alpha T(1) + \beta T(x) + \gamma T(x^2)$ & γραμμικά ανεξάρτητα

$$T(\alpha + \beta x + \gamma x^2) = \left(\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{3} \right) T(1) + \left(\frac{\beta}{\sqrt{12}} + \frac{\gamma}{\sqrt{12}} \right) T\left(\sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{\delta}{\sqrt{180}} T\left(\sqrt{180}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right) \Rightarrow$$

$$T(\alpha + \beta x + \gamma x^2) = \left(\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{3} \right) \cdot (1, 0, 0) + \left(\frac{\beta}{\sqrt{12}} + \frac{\gamma}{\sqrt{12}} \right) (0, 1, 0) + \frac{\delta}{\sqrt{180}} (0, 0, 1) = \dots \dots \dots \text{πραγμ.$$

4) Στον ευκλείδειο χώρο $R_2[x]$ εφοδιασμένο με το
Εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$

- Να βρείτε μια ορθοκανονική βάση του $R_2[x]$
- Ποια η γωνία των $x+1$ και x^2-1 ;
- Να βρείτε την προβολή του $x+x^2$ στον υποχώρο που παράγεται από τα $x+1$ και x^2-1
- Να βρείτε το α ώστε $x-\alpha$ και x^2+x να έχουν ελάχιστη απόσταση

Λύση

- Εστω η βάση $\{1, x, x^2\}$ βρισ|

$$V_1' = 1$$

$$V_2' = t - \frac{\langle t, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 = t - \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{καν.}} V_2' = \sqrt{12} \left(t - \frac{1}{2} \right)$$

$$V_3' = t^2 - \frac{\langle t^2, t - \frac{1}{2} \rangle}{\langle t - \frac{1}{2}, t - \frac{1}{2} \rangle} \left(t - \frac{1}{2} \right) - \frac{\langle t^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 = t^2 - t + \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{καν.}} V_3' = \sqrt{180} \left(t^2 - t + \frac{1}{6} \right)$$

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{x+1, x^2-1}) &= \frac{\langle x+1, x^2-1 \rangle}{\|x+1\| \cdot \|x^2-1\|} = \frac{\int_0^1 (x+1) \cdot (x^2-1) dx}{\sqrt{\int_0^1 (x+1)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 (x-1)^2 dx}} = \\ &= \frac{-11\sqrt{45}}{12\sqrt{56}} \Rightarrow (\widehat{x+1, x^2-1}) = \cos^{-1} \left(-\frac{11\sqrt{45}}{12\sqrt{56}} \right) \end{aligned}$$

$$V = \langle x+1, x^2-1 \rangle \text{ γενναται από τα } x+1, x^2-1$$

$$\text{Και } u = x^2+x$$

Θα πρέπει το $u \perp V_1 = x+1$ και $u \perp V_2 = x^2-1$

$$(G-S): V_1'' = x+1$$

$$V_2'' = V_2 - \frac{\langle V_2, V_1'' \rangle}{\langle V_1'', V_1'' \rangle} V_1'' = x^2 + \frac{11}{28}x - \frac{17}{28}$$

24. ροζώνια. βρού το V γεννημένο:

$$V = \langle x+1, x^2 + \frac{11}{28}x - \frac{17}{28} \rangle$$

$$\text{Προβ}_{\mathcal{V}} u = \text{Προβ}_{v_1'} u + \text{Προβ}_{v_2''} u =$$

$$= \frac{\langle u, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' + \frac{\langle u, v_2'' \rangle}{\langle v_2'', v_2'' \rangle} v_2'' =$$

$$= \frac{\int_0^1 (x+x^2)(x+1) dx}{7/3} (x+1) + \frac{\int_0^1 (x+x^2)(x^2 + \frac{11}{28}x - \frac{17}{28}) dx}{\int_0^1 (x^2 + \frac{11}{28}x - \frac{17}{28}) dx} \cdot$$

$$\cdot (x^2 + \frac{11}{28}x - \frac{17}{28}) = \dots$$

$$\bullet \|x^2 + x - (x-a)\|^2 \Rightarrow \|x^2 - a\|^2 \Rightarrow \|x^2 - a\|^2 =$$

$$= \langle x^2 - a, x^2 - a \rangle = \int_0^1 (x^2 + a)^2 dx = \frac{1}{5} + \frac{2}{3}a + a^2$$

$$\text{Έστω } f(a) = a^2 + \frac{2}{3}a + \frac{1}{5}$$

$$f'(a) = 2a + \frac{2}{3} \Rightarrow f'(a) = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \quad \leftarrow \text{βρέθηκε}$$

$$\left. \begin{array}{l} f \uparrow : [-\frac{1}{3}, +\infty) \\ f \downarrow : (-\infty, -\frac{1}{3}] \end{array} \right\} \text{ ολ. ελάχιστο στο } \left(-\frac{1}{3}\right)$$